

# О ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ К ДЛИННОПЕРИОДНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

В.А.Желиговский

Международный институт теории прогноза землетрясений  
и математической геофизики РАН

Лаборатория общей аэродинамики, Институт механики МГУ;

Обсерватория Лазурного Берега, CNRS U.M.R. 6529

*E-mail:* vlad@mitp.ru

Построено полное асимптотическое разложение решений задачи о линейной устойчивости трехмерных стационарных пространственно-периодических МГД состояний по отношению к длиннопериодным возмущениям. Найден тензор вихревой диффузии для стационарных состояний, обладающих центральной симметрией. Численно показано, что эффект отрицательной вихревой диффузии появляется при учете наличия возмущений поля скорости при существенно больших значениях коэффициента молекулярной магнитной диффузии, чем в задаче кинематического динамо (в которой предполагается отсутствие возмущений поля скорости).

## 1. Введение.

Согласно общепринятым представлениям магнитное поле Земли обязано своим существованием магнитоконвекционным процессам во внешнем ядре. В принципе эти процессы можно численно моделировать, решая соответствующую систему трехмерных уравнений – уравнение Навье-Стокса с учетом сил Лоренца и термоконвекционной плавучести, уравнение магнитной индукции и уравнение теплопроводности. Этот подход применен, например, в [Glatzmaier, Roberts, 1995, 1996; Roberts, Glatzmaier, 2001; Sarson, Jones, 1999] для изучения инверсий магнитного поля Земли. Однако он имеет внутренние ограничения, связанные с недостаточной вычислительной мощностью существующих компьютеров – разрешение, которое можно получить в расчетах, мало для адекватного представления решений при значениях определяющих констант, соответствующих геофизическим условиям. Таким образом, определенную ценность представляют аналитические решения идеализированных задач.

Одна из таких задач рассмотрена в данной работе – задача об устойчивости магнитогидродинамических стационарных состояний. Предполагается, что характерный пространственный масштаб рассматриваемого стационарного состояния существенно меньше характерного масштаба возмущений. Отношение этих масштабов,  $\epsilon$ , можно тогда рассматривать как малый параметр, что позволяет применить асимптотические методы и построить решения задачи об устойчивости в

виде степенных рядов по этому параметру. Показано, что для систем общего положения малые возмущения подвержены действию  $\gamma$ -эффекта. Как следствие, такие системы неустойчивы: главные члены разложений собственных значений, соответствующих противоположным волновым векторам, отвечающим длинным масштабам возмущений, имеют противоположные знаки.

В случае, если система обладает симметрией относительно центра (и тем самым не является системой общего положения),  $\gamma$ -эффект отсутствует, а главные члены разложений собственных значений и собственных векторов являются соответственно собственными значениями и собственными векторами так называемого оператора анизотропной комбинированной вихревой (турбулентной) диффузии. Он является оператором в частных производных второго порядка и задается уравнениями (26), коэффициенты (27) которого требуют решения т.н. вспомогательных краевых задач (11), (12), (24) и (25) (см. ниже). Данные во вспомогательных задачах имеют единственный характерный пространственный масштаб – тот же самый, что и рассматриваемое стационарное состояние – и поэтому допускают численное решение. Оператор вихревой диффузии, в отличие от оператора молекулярной диффузии, может не быть знакоопределен. В случае, если он имеет положительные собственные значения, говорят о возникновении феномена отрицательной диффузии. Проведенные численные эксперименты показывают, что вихревая диффузия может принимать отрицательные значения при существенно больших значениях коэффициента молекулярной магнитной диффузии в рассматриваемой ситуации (т.е. при учете наличия возмущений поля скорости), чем в ситуации кинематического динамо.

Отметим, что указанные механизмы возникновения неустойчивости магнито-гидродинамического стационарного состояния являются слабыми: при наличии  $\gamma$ -эффекта главный член разложения собственных значений пропорционален  $\epsilon$ , а для систем с центром симметрии пропорционален  $\epsilon^2$ .

Рассматриваемое стационарное магнито-гидродинамическое состояние  $\mathbf{V}, \mathbf{H}, P$  удовлетворяет системе уравнений

$$\nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} - \nabla P + \mathbf{F} = 0, \quad (1.1)$$

$$\eta \Delta \mathbf{H} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{H}) + \mathbf{J} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  – скорость потока проводящей жидкости,  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  – магнитное поле,  $P(\mathbf{x})$  – давление,  $\nu$  и  $\eta$  – коэффициенты кинематической и магнитной молекулярной диффузии, соответственно,  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  – объемная сила,  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  отвечает наличию в системе распределения наложенных внешних токов. Поля  $2\pi$ -периодичны по пространственным переменным, их средние по пространству равны 0. Исследование линейной устойчивости этого стационарного состояния приводит к задаче на собственные значения

$$\nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \times \mathbf{h}) \times \mathbf{H} + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{h} - \nabla p = \lambda \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

$$\eta \Delta \mathbf{h} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{h}) = \lambda \mathbf{h}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{h} = 0. \quad (2.3)$$

(Уравнения (2) получены стандартной процедурой отбрасывания квадратичных членов в полных уравнениях, описывающих эволюцию возмущений, см., например, [Chandrasekhar, 1961].) Предполагается, что профили возмущений  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ ,  $p(\mathbf{x})$  имеют пространственный масштаб  $2\pi/\epsilon$ , где  $\epsilon > 0$  – малый параметр. В данной работе построено полное асимптотическое разложение для профилей возмущений и инкрементов их роста (или убывания) во времени в виде степенных рядов по  $\epsilon$  (при выполнении определенных условий, описанных ниже).

При рассмотрении указанных задач используется математическая теория осреднения дифференциальных операторов [Жиков, Козлов, Олейник, Ха Тьен Нгоан, 1979; Козлов, 1978; Bensoussan, Lions, Papanicolaou, 1978]. Из аналогичных представленным здесь разложений для немагнитных систем ( $\mathbf{h} = \mathbf{H} = 0$ ) следует, что эффект отрицательной вихревой диффузии может возникнуть в двумерных [Sivashinsky, Yakhot, 1985; Sivashinsky, Frenkel, 1992; Gama, Vergassola, Frisch, 1994] и трехмерных [Dubrulle, Frisch, 1991; Wirth, Gama, Frisch, 1995] гидродинамических системах, если поле скорости обладает центральной симметрией или является полем Бельтрами. В гидродинамических системах, не имеющих этих свойств, подобные разложения указывают на наличие т.н. АКА-эффекта (кинематического  $\alpha$ -эффекта) [Frisch, Zhen Su She, Sulem, 1987; Sulem, She, Scholl, Frisch, 1989]. При переносе пассивного скаляра вихревая диффузия только усиливает молекулярную диффузию [Biferale, Crisanti, Vergassola, Vulpiani, 1995; Vergassola, Avellaneda, 1997]. В задаче кинематического динамо (об устойчивости магнитного поля при фиксированном поле скорости  $\mathbf{V}$  проводящей среды) асимптотические разложения предсказывают появление  $\alpha$ - [Вишик, 1986; Желиговский, 1990, 1991; Zheligovsky, 1991] или  $\gamma$ -эффекта [Вишик, 1987], а если у поля скорости есть центр симметрии – возможность генерации магнитного поля посредством механизма отрицательной вихревой диффузии [Lanotte, Noullez, Vergassola, Wirth, 1999; Zheligovsky, Podvigina, Frisch, 2001].

## 2. Формальные асимптотические разложения.

1. Пусть  $\mathbf{x}$ , как и выше, обозначает быструю пространственную переменную, а  $\mathbf{y} = \epsilon \mathbf{x}$  – медленную. Решение задачи на собственные значения (2) ищем в виде степенных рядов

$$\mathbf{v} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{v}_n(\mathbf{y}) + \mathbf{w}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \epsilon^n, \quad \mathbf{h} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{h}_n(\mathbf{y}) + \mathbf{g}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \epsilon^n, \quad (3)$$

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} (p_n(\mathbf{y}) + q_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \epsilon^n, \quad (4)$$

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \epsilon^n. \quad (5)$$

В (3),(4)  $\mathbf{v}_n$ ,  $\mathbf{h}_n$  и  $p_n$  – средние части, а  $\mathbf{w}_n$ ,  $\mathbf{g}_n$  и  $q_n$  – соответственно, осциллирующие части соответствующих членов разложений. Имеется в виду усреднение по быстрым переменным:

$$\langle \mathbf{f} \rangle \equiv (2\pi)^{-3} \int_{T^3} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}$$

– средняя, а  $\{\mathbf{f}\} \equiv \mathbf{f} - \langle \mathbf{f} \rangle$  – осциллирующая часть поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Приравняем нулю коэффициенты рядов по степеням  $\epsilon$ , полученных подстановкой рядов (3) в (2.3). Выделяя среднюю и осциллирующую часть полученных уравнений, находим

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v}_n = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{h}_n = 0, \quad (6.1)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_n + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{w}_{n-1} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}_n + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{g}_{n-1} = 0 \quad (6.2)$$

для всех  $n \geq 0$ . Здесь в дифференциальных операторах с индексами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  дифференцирование производится по быстрым и медленным пространственным переменным, соответственно (все члены разложений с индексом  $n < 0$  по определению равны 0).

Введем обозначения

$$\begin{aligned} L^v(\mathbf{w}, \mathbf{g}, q) &\equiv \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{w} + \mathbf{V} \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{V}) \\ &\quad + (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{g} + (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{g}) \times \mathbf{H} - \nabla_{\mathbf{x}} q, \\ L^h(\mathbf{w}, \mathbf{g}) &\equiv \eta \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{g} + \nabla_{\mathbf{x}} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{g} + \mathbf{w} \times \mathbf{H}). \end{aligned}$$

Отметим, что в силу (1.3) и  $2\pi$ -периодичности  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{H}$

$$\langle L^v(\mathbf{w}, \mathbf{g}, q) \rangle = \langle \mathbf{V} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{H} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g} \rangle, \quad \langle L^h(\mathbf{w}, \mathbf{g}) \rangle = 0 \quad (7)$$

для произвольных полей  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $2\pi$ -периодических по быстрым переменным.

В дальнейшем предполагаем, что для произвольных  $\mathbf{f}^v(\mathbf{x}), \mathbf{f}^h(\mathbf{x})$  из пространства соленоидальных полей с нулевым средним,  $2\pi$ -периодических по быстрым переменным, система уравнений

$$L^v(\mathbf{w}, \mathbf{g}, q) = \mathbf{f}^v, \quad L^h(\mathbf{w}, \mathbf{g}) = \mathbf{f}^h, \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g} = 0 \quad (8)$$

имеет единственное решение  $\mathbf{w}, \mathbf{g}, q$  в указанном пространстве. Это условие выполнено для стационарных состояний (1) общего положения (т.е. малое возмущение полей  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{J}$  в системах, где оно не выполнено, приводит к его выполнению).

Подставляя (3)-(5) в уравнения (2.1) и (2.2), преобразуем последние к виду равенств рядов по степеням  $\epsilon$ . Приравнявая коэффициенты этих рядов, получаем рекуррентную систему уравнений, которую последовательно решаем совместно с условиями (6), выделяя среднюю и осциллирующую часть каждого уравнения.

2. Из главных членов (порядка  $\epsilon^0$ ) рядов (2.1) и (2.2) получаем уравнения

$$L^v(\mathbf{w}_0, \mathbf{g}_0, q_0) + \mathbf{v}_0 \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{V}) + (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{h}_0 = \lambda_0(\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_0), \quad (9.1)$$

$$L^h(\mathbf{w}_0, \mathbf{g}_0) + (\mathbf{h}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{V} - (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{H} = \lambda_0(\mathbf{h}_0 + \mathbf{g}_0). \quad (9.2)$$

Усредняя их с использованием (7), получаем в силу равенств (6.2) при  $n = 0$ , что  $0 = \lambda_0 \mathbf{v}_0 = \lambda_0 \mathbf{h}_0$ , откуда  $\lambda_0 = 0$  (альтернативная возможность  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{h}_0 = 0$  не представляет интереса, т.к. она соответствует возмущению короткопериодной моды).

Осциллирующие части уравнений (9) в силу их линейности имеют тогда решения следующей структуры:

$$\mathbf{w}_0 = \sum_{k=1}^3 (\mathbf{S}_k^{v,v} \mathbf{v}_0^k + \mathbf{S}_k^{h,v} \mathbf{h}_0^k), \quad \mathbf{g}_0 = \sum_{k=1}^3 (\mathbf{S}_k^{v,h} \mathbf{v}_0^k + \mathbf{S}_k^{h,h} \mathbf{h}_0^k), \quad (10.1)$$

$$q_0 = \sum_{k=1}^3 (S_k^{v,p} \mathbf{v}_0^k + S_k^{h,p} \mathbf{h}_0^k), \quad (10.2)$$

где  $2\pi$ -периодические функции  $\mathbf{S}$  с нулевым средним являются решениями систем уравнений

$$L^v(\mathbf{S}_k^{v,v}, \mathbf{S}_k^{v,h}, S_k^{v,p}) = -\mathbf{e}_k \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{V}), \quad (11.1)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_k^{v,v} = 0, \quad (11.2)$$

$$L^h(\mathbf{S}_k^{v,v}, \mathbf{S}_k^{v,h}) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}_k}; \quad (11.3)$$

$$L^v(\mathbf{S}_k^{h,v}, \mathbf{S}_k^{h,h}, S_k^{h,p}) = \mathbf{e}_k \times (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}), \quad (12.1)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_k^{h,v} = 0, \quad (12.2)$$

$$L^h(\mathbf{S}_k^{h,v}, \mathbf{S}_k^{h,h}) = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}_k}. \quad (12.3)$$

Здесь  $\mathbf{e}_k$  – единичный вектор вдоль оси координат  $x_k$ , верхний индекс  $k$  нумерует компоненты вектора:

$$\mathbf{v}_0 = \sum_{k=1}^3 \mathbf{v}_0^k \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{h}_0 = \sum_{k=1}^3 \mathbf{h}_0^k \mathbf{e}_k.$$

Задачи (11) и (12) имеют единственное решение согласно изначальному предположению о разрешимости задач (8). Взяв дивергенцию от (11.3) и (12.3), находим  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_k^{v,h} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_k^{h,h} = 0$ .

3. Рассмотрим уравнения, полученные из членов (2.1) и (2.2) порядка  $\epsilon^1$ . Используя (7), (6.2) при  $n = 1$  и (10.1), их средние части представим в виде

$$\sum_{k=1}^3 (\Gamma_k^{v,v} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v}_0^k + \Gamma_k^{h,v} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{h}_0^k) - \nabla_{\mathbf{y}} p'_0 = \lambda_1 \mathbf{v}_0, \quad (13.1)$$

$$\nabla_{\mathbf{y}} \times \sum_{k=1}^3 (\Gamma_k^{v,h} \mathbf{v}_0^k + \Gamma_k^{h,h} \mathbf{h}_0^k) = \lambda_1 \mathbf{h}_0, \quad (13.2)$$

где  $p'_0 \equiv p_0 - \langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{w}_0 - \mathbf{H} \cdot \mathbf{g}_0 \rangle$ , элементы матриц  $\Gamma_k^{v,v}$  размера  $3 \times 3$  имеют вид

$$(\Gamma_k^{v,v})_j^m \equiv \langle -\mathbf{V}^m (\mathbf{S}_k^{v,v})^j - \mathbf{V}^j (\mathbf{S}_k^{v,v})^m + \mathbf{H}^m (\mathbf{S}_k^{v,h})^j + \mathbf{H}^j (\mathbf{S}_k^{v,h})^m \rangle,$$

$$(\Gamma_k^{h,v})_j^m \equiv \langle -\mathbf{V}^m (\mathbf{S}_k^{h,v})^j - \mathbf{V}^j (\mathbf{S}_k^{h,v})^m + \mathbf{H}^m (\mathbf{S}_k^{h,h})^j + \mathbf{H}^j (\mathbf{S}_k^{h,h})^m \rangle,$$

а трехмерные векторы  $\Gamma_k^{h,h}$  задаются выражениями

$$\Gamma_k^{v,h} \equiv \langle \mathbf{V} \times \mathbf{S}_k^{v,h} - \mathbf{H} \times \mathbf{S}_k^{v,v} \rangle, \quad \Gamma_k^{h,h} \equiv \langle \mathbf{V} \times \mathbf{S}_k^{h,h} - \mathbf{H} \times \mathbf{S}_k^{h,v} \rangle.$$

Дальнейший ход решения уравнений, полученных из (2.1) и (2.2) при  $n > 0$ , для случаев  $\gamma$ -эффекта и вихревой диффузии различен.

### 3. $\gamma$ -эффект.

4. Собственные функции задачи на собственные значения (13) являются гармониками Фурье:  $\mathbf{v}_0 = \hat{\mathbf{v}}_0 e^{i\xi \mathbf{y}}$ ,  $\mathbf{h}_0 = \hat{\mathbf{h}}_0 e^{i\xi \mathbf{y}}$ , где  $\xi$  – произвольный постоянный волновой вектор, а векторы  $\hat{\mathbf{v}}_0$  и  $\hat{\mathbf{h}}_0$  удовлетворяют следующим условиям:

$$-\frac{i}{|\xi|^2} \xi \times \left( \xi \times \sum_{k=1}^3 (\hat{\mathbf{v}}_0^k \Gamma_k^{v,v} + \hat{\mathbf{h}}_0^k \Gamma_k^{h,v}) \xi \right) = \lambda_1 \hat{\mathbf{v}}_0, \quad (14.1)$$

$$i\xi \times \sum_{k=1}^3 (\hat{\mathbf{v}}_0^k \Gamma_k^{v,h} + \hat{\mathbf{h}}_0^k \Gamma_k^{h,h}) = \lambda_1 \hat{\mathbf{h}}_0. \quad (14.2)$$

Условия соленоидальности (6.1) преобразуются к виду

$$\hat{\mathbf{v}}_0 \cdot \xi = \hat{\mathbf{h}}_0 \cdot \xi = 0. \quad (15)$$

Обозначим матрицу размера  $6 \times 6$  в левой части (14), которая умножается на вектор  $(\hat{\mathbf{v}}_0, \hat{\mathbf{h}}_0)$ , через  $\Gamma(\xi)$ . Отображение  $(\hat{\mathbf{v}}_0, \hat{\mathbf{h}}_0) \rightarrow \Gamma(\xi)(\hat{\mathbf{v}}_0, \hat{\mathbf{h}}_0)$  является символом предельного псевдодифференциального оператора  $L_\infty$ , действующего на  $(\mathbf{v}_0(\mathbf{y}), \mathbf{h}_0(\mathbf{y}))$ , который определен левой частью (13). Пусть

$$V_\xi = \{(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{h}}) \mid \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{h}} \in R^3, \hat{\mathbf{v}} \cdot \xi = \hat{\mathbf{h}} \cdot \xi = 0\} \subset R^6,$$

$$\bar{H}^s = \{\mathbf{f}(\mathbf{y}) \in H^s(T^3) \mid \nabla \cdot \mathbf{f} = 0\},$$

где  $H^s(T^3)$  – пространство Соболева с метрикой  $W_2^s(T^3)$  соленоидальных функций с нулевым средним на трехмерном торе. Отметим следующее свойство спектра  $L_\infty$ : если  $\lambda$  – собственное значение, отвечающее некоторому волновому вектору  $\xi$ , то  $-\lambda$  – собственное значение, отвечающее  $-\xi$ . Таким образом, имеет место характерная для  $\gamma$ -эффекта альтернатива: либо возмущение с любым волновым вектором имеет вид гармонических колебаний с постоянной амплитудой, либо существуют волновые векторы, для которых возмущения неустойчивы.

5. Дальнейшее изложение в данном разделе проведем для случая, когда для предельного оператора выполнено следующее условие типа эллиптичности: для любого  $\xi$  матрица  $\Gamma(\xi)$  определяет линейный оператор, действующий в  $V_\xi$  невырожденно. Тогда образ линейного оператора  $L_\infty : \bar{H}^{s+1} \rightarrow \bar{H}^s$  замкнут,  $L_\infty$  имеет дискретный спектр, и для любого  $\lambda$ , принадлежащего резольвентному множеству  $L_\infty$ , оператор  $(L_\infty - \lambda)^{-1}$  компактен.

Кроме того, будем предполагать для простоты, что кратность собственного значения  $\lambda_1$  матрицы  $\Gamma(\xi)$  равна 1. Это последнее условие не вызвано существом дела – аналогичные (несколько более громоздкие) построения можно провести и в случае кратного собственного значения. Оно выполнено для систем общего положения, т.е. если для некоторого стационарного состояния рассматриваемое собственное значение оказалось кратным, то при почти любом малом возмущении

функций  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{J}$ , определяющих стационарное состояние системы (1), это собственное значение расщепляется на соответствующее число собственных значений кратности 1.

Для решения уравнений, полученных из членов (2.1) и (2.2) порядка  $\epsilon^n$  при  $n > 0$ , удобно сделать подстановки

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{w}'_n + \sum_{k=1}^3 (\mathbf{S}_k^{v,v} \mathbf{v}_n^k + \mathbf{S}_k^{h,v} \mathbf{h}_n^k), \quad (16.1)$$

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{g}'_n + \sum_{k=1}^3 (\mathbf{S}_k^{v,h} \mathbf{v}_n^k + \mathbf{S}_k^{h,h} \mathbf{h}_n^k), \quad (16.2)$$

$$q_n = q'_n + \sum_{k=1}^3 (S_k^{v,p} \mathbf{v}_n^k + S_k^{h,p} \mathbf{h}_n^k), \quad (16.3)$$

после чего эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} & L^v(\mathbf{w}'_n, \mathbf{g}'_n, q'_n) + \nu (2(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{w}_{n-1} + \Delta_{\mathbf{y}}(\mathbf{v}_{n-2} + \mathbf{w}_{n-2})) \\ & + \mathbf{V} \times (\nabla_{\mathbf{y}} \times (\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1})) + (\nabla_{\mathbf{y}} \times (\mathbf{h}_{n-1} + \mathbf{g}_{n-1})) \times \mathbf{H} \\ & - \nabla_{\mathbf{y}}(p_{n-1} + q_{n-1}) - \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_{n-m}(\mathbf{v}_m + \mathbf{w}_m) = 0, \end{aligned} \quad (17.1)$$

$$\begin{aligned} & L^h(\mathbf{w}'_n, \mathbf{g}'_n) + \eta (2(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{g}_{n-1} + \Delta_{\mathbf{y}}(\mathbf{h}_{n-2} + \mathbf{g}_{n-2})) \\ & - (\mathbf{V} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{h}_{n-1} + (\mathbf{H} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{v}_{n-1} \\ & + \nabla_{\mathbf{y}} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{g}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1} \times \mathbf{H}) - \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_{n-m}(\mathbf{h}_m + \mathbf{g}_m) = 0. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Покажем, что (17) можно последовательно решить, причем

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{y}) = \hat{\mathbf{v}}_n e^{i\xi \mathbf{y}}, \quad \mathbf{h}_n(\mathbf{y}) = \hat{\mathbf{h}}_n e^{i\xi \mathbf{y}}, \quad p_n(\mathbf{y}) = \hat{p}_n e^{i\xi \mathbf{y}}, \quad (18.1)$$

$$\mathbf{w}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{\mathbf{w}}_n(\mathbf{x}) e^{i\xi \mathbf{y}}, \quad \mathbf{g}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{\mathbf{g}}_n(\mathbf{x}) e^{i\xi \mathbf{y}}, \quad q_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{q}_n(\mathbf{x}) e^{i\xi \mathbf{y}}. \quad (18.2)$$

Предположим, что для некоторого  $N$  решены все уравнения при  $n < N$  и определены неизвестные функции  $\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n, \mathbf{h}_n, \mathbf{g}_n, p_n, q_n$  при всех  $n < N - 1$ ,  $\mathbf{w}'_{N-1}, \mathbf{g}'_{N-1}, q'_{N-1}$ , а также  $\lambda_n$  при всех  $n < N$ , причем зависимость неизвестных функций от медленной переменной выражается согласно (18) в их пропорциональности  $e^{i\xi \mathbf{y}}$ . Рассмотрим уравнение, соответствующее  $n = N$ .

Подстановка (16) при  $n = N - 1$  приводит средние части уравнений (17) при  $n = N$  к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 (\Gamma_k^{v,v} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v}_{N-1}^k + \Gamma_k^{h,v} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{h}_{N-1}^k) - \nabla_{\mathbf{y}} p'_{N-1} - \lambda_1 \mathbf{v}_{N-1} - \lambda_N \mathbf{v}_0 \\ & = -\langle \mathbf{V} \times (\nabla_{\mathbf{y}} \times \mathbf{w}'_{N-1}) - \mathbf{V} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{w}'_{N-1} + (\nabla_{\mathbf{y}} \times \mathbf{g}'_{N-1}) \times \mathbf{H} + \mathbf{H} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{g}'_{N-1} \rangle \end{aligned}$$

$$-\nu \Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{v}_{N-2} + \sum_{m=1}^{N-2} \lambda_{N-m} \mathbf{v}_m, \quad (19.1)$$

где

$$p'_{N-1} = p_{N-1} - \left\langle \mathbf{V} \cdot \sum_{k=1}^3 (\mathbf{S}_k^{v,v} \mathbf{v}_{N-1}^k + \mathbf{S}_k^{h,v} \mathbf{h}_{N-1}^k) - \mathbf{H} \cdot \sum_{k=1}^3 (\mathbf{S}_k^{v,h} \mathbf{v}_{N-1}^k + \mathbf{S}_k^{h,h} \mathbf{h}_{N-1}^k) \right\rangle,$$

и

$$\begin{aligned} & \nabla_{\mathbf{y}} \times \sum_{k=1}^3 (\Gamma_k^{v,h} \mathbf{v}_{N-1}^k + \Gamma_k^{h,h} \mathbf{h}_{N-1}^k) - \lambda_1 \mathbf{h}_{N-1} - \lambda_N \mathbf{h}_0 \\ &= -\eta \Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{h}_{N-2} - \nabla_{\mathbf{y}} \times \langle \mathbf{V} \times \mathbf{g}'_{N-1} + \mathbf{w}'_{N-1} \times \mathbf{H} \rangle + \sum_{m=1}^{N-2} \lambda_{N-m} \mathbf{h}_m. \end{aligned} \quad (19.2)$$

Согласно предположению индукции правые части (19) имеют вид  $\hat{\mathbf{f}}_N^v e^{i\xi \mathbf{y}}$  и  $\hat{\mathbf{f}}_N^h e^{i\xi \mathbf{y}}$ , где векторы-константы  $\hat{\mathbf{f}}_N^v$  и  $\hat{\mathbf{f}}_N^h$  уже известны, причем  $\hat{\mathbf{f}}_N^h \cdot \xi = 0$ . Используя (18.1) при  $n = N - 1$ , из (19) получаем

$$(\Gamma(\xi) - \lambda_1) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}}_{N-1} \\ \hat{\mathbf{h}}_{N-1} \end{pmatrix} - \lambda_N \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}}_0 \\ \hat{\mathbf{h}}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|\xi|^{-2} \xi \times (\xi \times \hat{\mathbf{f}}_N^v) \\ \hat{\mathbf{f}}_N^h \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Эту задачу рассматриваем в  $V_\xi$ . Проектируя (20) на  $(\hat{\mathbf{v}}_0, \hat{\mathbf{h}}_0) \in V_\xi$ , находим  $\lambda_N$ . Считаем, что компонента вектора  $(\hat{\mathbf{v}}_{N-1}, \hat{\mathbf{h}}_{N-1})$  из подпространства, натянутого на  $(\hat{\mathbf{v}}_0, \hat{\mathbf{h}}_0)$ , равна нулю (это условие нормировки соответствует тому факту, что собственную функцию можно умножить на произвольную аналитическую функцию  $\epsilon$ ). Поскольку в силу исходного предположения матрица  $\Gamma(\xi) - \lambda_1$  обратима в дополнительном собственном подпространстве пространства  $V_\xi$ , из (20) находим  $(\hat{\mathbf{v}}_{N-1}, \hat{\mathbf{h}}_{N-1})$ . Наконец, (19.1) определяет  $p'_{N-1}$ , а (16) при  $n = N - 1$  – функции  $\mathbf{w}_{N-1}$ ,  $\mathbf{g}_{N-1}$  и  $q_{N-1}$ .

Осциллирующие части уравнений (17) при  $n = N$ , рассматриваемые при условиях  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}'_N = -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{w}_{N-1}$  и  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}'_N = -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{g}_{N-1}$  (следствиях (6.2)), можно тогда решить, выделяя градиентную часть неизвестных вектор-функций. Пусть  $\varphi_N^v$  и  $\varphi_N^h$  –  $2\pi$ -периодические по быстрой переменной решения краевых задач  $\Delta_{\mathbf{x}} \varphi_N^v = -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{w}_{N-1}$  и  $\Delta_{\mathbf{x}} \varphi_N^h = -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{g}_{N-1}$ . Подстановки  $\mathbf{w}'_N = \mathbf{w}''_N + \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_N^v$  и  $\mathbf{g}'_N = \mathbf{g}''_N + \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_N^h$  приводят осциллирующие части уравнений (17) к задаче относительно  $\mathbf{w}''_N, \mathbf{g}''_N$  вида (8) с условием соленоидальности неизвестных векторных полей.

Таким образом, построено полное асимптотическое разложение мод линейных возмущений и их временных инкрементов для случая, когда для предельного оператора  $L_\infty$  выполнено приведенное выше условие типа эллиптичности. Точнее, можно показать, что в этом случае каждому собственному значению оператора  $L_\infty$  отвечает ветвь собственных значений исходного оператора (задачи (2)), причем асимптотические ряды (3)-(5) сходятся при достаточно малых  $\epsilon$ . Доказательство этого основано на применении теории возмущения операторов [Като, 1972] и следует доказательству [Вишик, 1987] для чисто магнитного случая.



#### 4. Вихревая диффузия.

6. В данном разделе рассмотрен случай, когда стационарные поля имеют центр симметрии, который без потери общности считаем расположенным в начале координат:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{V}(-\mathbf{x}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = -\mathbf{H}(-\mathbf{x}). \quad (21)$$

Тогда область определения оператора  $(L^v, L^h)$  распадается на два собственных подпространства, состоящие из симметричных  $(\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(-\mathbf{x}))$  и антисимметричных  $(\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\mathbf{f}(-\mathbf{x}))$  полей. Поэтому выполнены симметрии

$$\mathbf{S}_k^{v,v}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}_k^{v,v}(-\mathbf{x}), \quad \mathbf{S}_k^{v,h}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}_k^{v,h}(-\mathbf{x}), \quad S_k^{v,p}(\mathbf{x}) = -S_k^{v,p}(-\mathbf{x}), \quad (22.1)$$

$$\mathbf{S}_k^{h,v}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}_k^{h,v}(-\mathbf{x}), \quad \mathbf{S}_k^{h,h}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}_k^{h,h}(-\mathbf{x}), \quad S_k^{h,p}(\mathbf{x}) = -S_k^{h,p}(-\mathbf{x}), \quad (22.2)$$

и следовательно  $\Gamma(\xi)$  – нулевая матрица. Уравнения (13) сводятся тогда к  $-\nabla_{\mathbf{y}} p_0 = \lambda_1 \mathbf{v}_0$  и  $0 = \lambda_1 \mathbf{h}_0$ , откуда  $\lambda_1 = 0$  и  $p_0 = 0$ .

7. Осциллирующие части уравнений (17) при  $n = 1$

$$\begin{aligned} L^v(\mathbf{w}'_1, \mathbf{g}'_1, q'_1) &= -2\nu(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{w}_0 - \mathbf{V} \times (\nabla_{\mathbf{y}} \times (\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_0)) \\ &\quad - (\nabla_{\mathbf{y}} \times (\mathbf{h}_0 + \mathbf{g}_0)) \times \mathbf{H} + \nabla_{\mathbf{y}} q_0, \\ L^h(\mathbf{w}'_1, \mathbf{g}'_1) &= -2\eta(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{g}_0 \\ &\quad + (\mathbf{V} \cdot \nabla_{\mathbf{y}})(\mathbf{h}_0 + \mathbf{g}_0) - (\mathbf{H} \cdot \nabla_{\mathbf{y}})(\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_0) - \mathbf{V} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{g}_0 + \mathbf{H} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{w}_0, \end{aligned}$$

в силу (10) и линейности этих уравнений имеют решения следующей структуры:

$$\mathbf{w}'_1 = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 (\mathbf{G}_{m,k}^{v,v} \frac{\partial \mathbf{v}_0^k}{\partial \mathbf{y}_m} + \mathbf{G}_{m,k}^{h,v} \frac{\partial \mathbf{h}_0^k}{\partial \mathbf{y}_m}), \quad (23.1)$$

$$\mathbf{g}'_1 = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 (\mathbf{G}_{m,k}^{v,h} \frac{\partial \mathbf{v}_0^k}{\partial \mathbf{y}_m} + \mathbf{G}_{m,k}^{h,h} \frac{\partial \mathbf{h}_0^k}{\partial \mathbf{y}_m}), \quad (23.2)$$

$$q'_1 = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 (G_{m,k}^{v,p} \frac{\partial \mathbf{v}_0^k}{\partial \mathbf{y}_m} + G_{m,k}^{h,p} \frac{\partial \mathbf{h}_0^k}{\partial \mathbf{y}_m}), \quad (23.3)$$

где функции  $\mathbf{G}$  являются решениями систем уравнений

$$\begin{aligned} L^v(\mathbf{G}_{m,k}^{v,v}, \mathbf{G}_{m,k}^{v,h}, G_{m,k}^{v,p}) &= -2\nu \frac{\partial \mathbf{S}_k^{v,v}}{\partial \mathbf{x}_m} - \mathbf{V}^k \mathbf{e}_m + \mathbf{V}^m \mathbf{e}_k - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{S}_k^{v,v}) \mathbf{e}_m \\ &\quad + \mathbf{V}^m \mathbf{S}_k^{v,v} + \mathbf{e}_m S_k^{v,p} + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_k^{v,h}) \mathbf{e}_m - \mathbf{H}^m \mathbf{S}_k^{v,h} \end{aligned} \quad (24.1)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{G}_{m,k}^{v,v} = -(\mathbf{S}_k^{v,v})^m, \quad (24.2)$$

$$\begin{aligned} L^h(\mathbf{G}_{m,k}^{v,v}, \mathbf{G}_{m,k}^{v,h}) &= -2\eta \frac{\partial \mathbf{S}_k^{v,h}}{\partial \mathbf{x}_m} \\ &\quad - \mathbf{V}(\mathbf{S}_k^{v,h})^m + \mathbf{V}^m \mathbf{S}_k^{v,h} + \mathbf{H}(\mathbf{S}_k^{v,v})^m - \mathbf{H}^m \mathbf{S}_k^{v,v} - \mathbf{H}^m \mathbf{e}_k; \end{aligned} \quad (24.3)$$

$$L^v(\mathbf{G}_{m,k}^{h,v}, \mathbf{G}_{m,k}^{h,h}, G_{m,k}^{h,p}) = -2\nu \frac{\partial \mathbf{S}_k^{h,v}}{\partial \mathbf{x}_m} + \mathbf{H}^k \mathbf{e}_m - \mathbf{H}^m \mathbf{e}_k - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{S}_k^{h,v}) \mathbf{e}_m + \mathbf{V}^m \mathbf{S}_k^{h,v} + \mathbf{e}_m S_k^{h,p} + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_k^{h,h}) \mathbf{e}_m - \mathbf{H}^m \mathbf{S}_k^{h,h} \quad (25.1)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{G}_{m,k}^{h,v} = -(\mathbf{S}_k^{h,v})^m, \quad (25.2)$$

$$L^h(\mathbf{G}_{m,k}^{h,v}, \mathbf{G}_{m,k}^{h,h}) = -2\eta \frac{\partial \mathbf{S}_k^{h,h}}{\partial \mathbf{x}_m} - \mathbf{V}(\mathbf{S}_k^{h,h})^m + \mathbf{V}^m \mathbf{S}_k^{h,h} + \mathbf{H}(\mathbf{S}_k^{h,v})^m - \mathbf{H}^m \mathbf{S}_k^{h,v} + \mathbf{V}^m \mathbf{e}_k \quad (25.3)$$

Взяв дивергенцию уравнений (24.3) и (25.3), и сравнив результат с  $m$ -ми компонентами уравнений (11.3) и (12.3), соответственно, находим  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{G}_{m,k}^{v,h} = -(\mathbf{S}_k^{v,h})^m$  и  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{G}_{m,k}^{h,h} = -(\mathbf{S}_k^{h,h})^m$ . Вследствие (21) и (22) правые части уравнений (24) и (25) являются антисимметричными полями, поэтому выполнены следующие соотношения симметрии:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{m,k}^{v,v}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{G}_{m,k}^{v,v}(-\mathbf{x}), \quad \mathbf{G}_{m,k}^{v,h}(\mathbf{x}) = -\mathbf{G}_{m,k}^{v,h}(-\mathbf{x}), \quad G_{m,k}^{v,p}(\mathbf{x}) = G_{m,k}^{v,p}(-\mathbf{x}), \\ \mathbf{G}_{m,k}^{h,v}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{G}_{m,k}^{h,v}(-\mathbf{x}), \quad \mathbf{G}_{m,k}^{h,h}(\mathbf{x}) = -\mathbf{G}_{m,k}^{h,h}(-\mathbf{x}), \quad G_{m,k}^{h,p}(\mathbf{x}) = G_{m,k}^{h,p}(-\mathbf{x}). \end{aligned}$$

8. Средние части уравнений (17) при  $n = 2$  можно тогда в силу (7), (6.2), (23.1) и (23.2) представить в виде

$$\nu \Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{v}_0 + \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{D}_{j,m,k}^{v,v} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0^k}{\partial \mathbf{y}_m \partial \mathbf{y}_j} + \mathbf{D}_{j,m,k}^{h,v} \frac{\partial^2 \mathbf{h}_0^k}{\partial \mathbf{y}_m \partial \mathbf{y}_j}) - \nabla_{\mathbf{y}} p'_1 = \lambda_2 \mathbf{v}_0, \quad (26.1)$$

$$\eta \Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{h}_0 + \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 (\nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{v}_0^k}{\partial \mathbf{y}_m} \times \mathbf{D}_{m,k}^{v,h} + \nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{h}_0^k}{\partial \mathbf{y}_m} \times \mathbf{D}_{m,k}^{h,h}) = \lambda_2 \mathbf{h}_0. \quad (26.2)$$

Здесь обозначено

$$p'_1 = p_1 - \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left( \langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{G}_{m,k}^{v,v} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_{m,k}^{v,h} \rangle \frac{\partial \mathbf{v}_0^k}{\partial \mathbf{y}_m} + \langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{G}_{m,k}^{h,v} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_{m,k}^{h,h} \rangle \frac{\partial \mathbf{h}_0^k}{\partial \mathbf{y}_m} \right),$$

$$\mathbf{D}_{j,m,k}^{v,v} = \langle -\mathbf{V}^j \mathbf{G}_{m,k}^{v,v} - \mathbf{V}(\mathbf{G}_{m,k}^{v,v})^j + \mathbf{H}^j \mathbf{G}_{m,k}^{v,h} + \mathbf{H}(\mathbf{G}_{m,k}^{v,h})^j \rangle,$$

$$\mathbf{D}_{j,m,k}^{h,v} = \langle -\mathbf{V}^j \mathbf{G}_{m,k}^{h,v} - \mathbf{V}(\mathbf{G}_{m,k}^{h,v})^j + \mathbf{H}^j \mathbf{G}_{m,k}^{h,h} + \mathbf{H}(\mathbf{G}_{m,k}^{h,h})^j \rangle,$$

$$\mathbf{D}_{m,k}^{v,h} = \langle \mathbf{V} \times \mathbf{G}_{m,k}^{v,h} - \mathbf{H} \times \mathbf{G}_{m,k}^{v,v} \rangle,$$

$$\mathbf{D}_{m,k}^{h,h} = \langle \mathbf{V} \times \mathbf{G}_{m,k}^{h,h} - \mathbf{H} \times \mathbf{G}_{m,k}^{h,v} \rangle.$$

Собственные функции задачи (26) – гармоники Фурье:  $\mathbf{v}_0 = \hat{\mathbf{v}}_0 e^{i\xi \mathbf{y}}$  и  $\mathbf{h}_0 = \hat{\mathbf{h}}_0 e^{i\xi \mathbf{y}}$ , где  $\xi$  – некоторый постоянный волновой вектор, а векторы  $\hat{\mathbf{v}}_0$  и  $\hat{\mathbf{h}}_0$  удовлетворяют (15) и уравнениям

$$-\nu |\xi|^2 \hat{\mathbf{v}}_0 + \xi \times \left( \xi \times \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\hat{\mathbf{v}}_0^k \mathbf{D}_{j,m,k}^{v,v} + \hat{\mathbf{h}}_0^k \mathbf{D}_{j,m,k}^{h,v}) \frac{\xi_m \xi_j}{|\xi|^2} \right) = \lambda_2 \hat{\mathbf{v}}_0, \quad (27.1)$$

$$-\eta|\xi|^2\hat{\mathbf{h}}_0 - \xi \times \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \xi_m (\hat{\mathbf{v}}_0^k \mathbf{D}_{m,k}^{v,h} + \hat{\mathbf{h}}_0^k \mathbf{D}_{m,k}^{h,h}) = \lambda_2 \hat{\mathbf{h}}_0. \quad (27.2)$$

9. В дальнейшем будем предполагать для простоты, что  $\lambda_2$  – собственное значение задачи (15), (27) кратности 1 (это условие выполнено для системы (1) общего положения).

Для решения уравнений (17) при  $n > 1$  сделаем подстановки

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_n'' + \sum_{k=1}^3 (\mathbf{S}_k^{v,v} \mathbf{v}_n^k + \mathbf{S}_k^{h,v} \mathbf{h}_n^k) + \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 (\mathbf{G}_{m,k}^{v,v} \frac{\partial \mathbf{v}_{n-1}^k}{\partial \mathbf{y}_m} + \mathbf{G}_{m,k}^{h,v} \frac{\partial \mathbf{h}_{n-1}^k}{\partial \mathbf{y}_m}), \quad (28.1)$$

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{g}_n'' + \sum_{k=1}^3 (\mathbf{S}_k^{v,h} \mathbf{v}_n^k + \mathbf{S}_k^{h,h} \mathbf{h}_n^k) + \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 (\mathbf{G}_{m,k}^{v,h} \frac{\partial \mathbf{v}_{n-1}^k}{\partial \mathbf{y}_m} + \mathbf{G}_{m,k}^{h,h} \frac{\partial \mathbf{h}_{n-1}^k}{\partial \mathbf{y}_m}), \quad (28.2)$$

$$q_n = q_n'' + \sum_{k=1}^3 (S_k^{v,p} \mathbf{v}_n^k + S_k^{h,p} \mathbf{h}_n^k) + \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 (G_{m,k}^{v,p} \frac{\partial \mathbf{v}_{n-1}^k}{\partial \mathbf{y}_m} + G_{m,k}^{h,p} \frac{\partial \mathbf{h}_{n-1}^k}{\partial \mathbf{y}_m}). \quad (28.3)$$

Уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} & L^v(\mathbf{w}_n'', \mathbf{g}_n'', q_n'') + \nu \left( 2(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{w}_{n-1}'' + \Delta_{\mathbf{y}} (\mathbf{v}_{n-2} + \mathbf{w}_{n-2}) \right. \\ & + 2 \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left( (\nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{v}_{n-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{G}_{m,k}^{v,v} + (\nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{h}_{n-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{G}_{m,k}^{h,v} \right) \\ & + \mathbf{V} \times \left( \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 (\nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{v}_{n-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} \times \mathbf{G}_{m,k}^{v,v} + \nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{h}_{n-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} \times \mathbf{G}_{m,k}^{h,v}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times \mathbf{w}_{n-1}'' \right) \\ & + \left( \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 (\nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{v}_{n-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} \times \mathbf{G}_{m,k}^{v,h} + \nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{h}_{n-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} \times \mathbf{G}_{m,k}^{h,h}) + \nabla_{\mathbf{y}} \times \mathbf{g}_{n-1}'' \right) \times \mathbf{H} \\ & - \nabla_{\mathbf{y}} \left( p_{n-1} + q_{n-1}'' + \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{n-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} G_{m,k}^{v,p} + \frac{\partial \mathbf{h}_{n-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} G_{m,k}^{h,p} \right) \right) \\ & \left. - \sum_{m=0}^{n-2} \lambda_{n-m} (\mathbf{v}_m + \mathbf{w}_m) = 0, \right. \end{aligned} \quad (29.1)$$

$$\begin{aligned} & L^h(\mathbf{w}_n, \mathbf{g}_n) + \eta \left( 2(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{g}_{n-1}'' + \Delta_{\mathbf{y}} (\mathbf{h}_{n-2} + \mathbf{g}_{n-2}) \right. \\ & + 2 \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left( (\nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{v}_{n-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{G}_{m,k}^{v,h} + (\nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{h}_{n-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{G}_{m,k}^{h,h} \right) \\ & + \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left( \nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{v}_{n-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{G}_{m,k}^{v,h} + \mathbf{G}_{m,k}^{v,v} \times \mathbf{H}) \right. \\ & \left. + \nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{h}_{n-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{G}_{m,k}^{h,h} + \mathbf{G}_{m,k}^{h,v} \times \mathbf{H}) \right) \\ & \left. + \nabla_{\mathbf{y}} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{g}_{n-1}'' + \mathbf{w}_{n-1}'' \times \mathbf{H}) - \sum_{m=0}^{n-2} \lambda_{n-m} (\mathbf{h}_m + \mathbf{g}_m) = 0. \right. \end{aligned} \quad (29.2)$$

Покажем, что можно последовательно найти из них все компоненты асимптотических разложений (3)-(5), причем выполнены соотношения (18). Пусть для некоторого  $N$  решены все уравнения при  $n < N$ , в результате этого определены  $\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n, \mathbf{h}_n, \mathbf{g}_n$  и  $q_n$  при всех  $n < N - 2$ ,  $p_n$  при всех  $n < N - 1$ , а также  $\mathbf{w}_n'', \mathbf{g}_n'', q_n''$  и  $\lambda_n$  при всех  $n < N$ , и зависимость всех найденных неизвестных функций от медленной переменной выражается в их пропорциональности  $e^{i\xi\mathbf{y}}$ . Рассмотрим уравнение, соответствующее  $n = N$ .

Средние части уравнений (29) при  $n = N$  имеют вид

$$\begin{aligned} & \nu \Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{v}_{N-2} + \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{D}_{j,m,k}^{v,v} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_{N-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m \partial \mathbf{y}_j} + \mathbf{D}_{j,m,k}^{h,v} \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{N-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m \partial \mathbf{y}_j}) \\ & - \nabla_{\mathbf{y}} p_{N-1} - \lambda_2 \mathbf{v}_{N-2} - \lambda_N \mathbf{v}_0 \\ & = -\langle \mathbf{V} \times (\nabla_{\mathbf{y}} \times \mathbf{w}_{N-1}'') + (\nabla_{\mathbf{y}} \times \mathbf{g}_{N-1}'') \times \mathbf{H} \rangle + \sum_{m=1}^{N-3} \lambda_{N-m} \mathbf{v}_m, \end{aligned} \quad (30.1)$$

$$\begin{aligned} & \eta \Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{h}_{N-2} + \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 (\nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{v}_{N-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} \times \mathbf{D}_{m,k}^{v,h} + \nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{h}_{N-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} \times \mathbf{D}_{m,k}^{h,h}) - \lambda_2 \mathbf{h}_{N-2} - \lambda_N \mathbf{h}_0 \\ & = -\nabla_{\mathbf{y}} \times \langle \mathbf{V} \times \mathbf{g}_{N-1}'' + \mathbf{w}_{N-1}'' \times \mathbf{H} \rangle + \sum_{m=1}^{N-3} \lambda_{N-m} \mathbf{h}_m. \end{aligned} \quad (30.2)$$

Согласно предположению индукции правые части (30) имеют вид  $\hat{\mathbf{f}}_N^v e^{i\xi\mathbf{y}}$  и  $\hat{\mathbf{f}}_N^h e^{i\xi\mathbf{y}}$ , где векторы-константы  $\hat{\mathbf{f}}_N^v$  и  $\hat{\mathbf{f}}_N^h$  известны, причем  $\hat{\mathbf{f}}_N^h \cdot \xi = 0$ . Обозначим матрицу размера  $6 \times 6$  в левой части (27) через  $D(\xi)$ . Подставляя (18.1) при  $n = N - 2$  и сокращая множитель  $e^{i\xi\mathbf{y}}$ , приводим (30) к эквивалентной системе

$$(D(\xi) - \lambda_2) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}}_{N-2} \\ \hat{\mathbf{h}}_{N-2} \end{pmatrix} - \lambda_N \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}}_0 \\ \hat{\mathbf{h}}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|\xi|^{-2} \xi \times (\xi \times \hat{\mathbf{f}}_N^v) \\ \hat{\mathbf{f}}_N^h \end{pmatrix},$$

которую решаем в  $V_\xi$  аналогично задаче (20). Именно, находим  $\lambda_N$  и вектор  $(\hat{\mathbf{v}}_{N-2}, \hat{\mathbf{h}}_{N-2})$  в собственном подпространстве пространства  $V_\xi$ , дополнительном к подпространству, натянутому на  $(\hat{\mathbf{v}}_0, \hat{\mathbf{h}}_0)$ . Затем из (30.1) находим  $p_{N-1}$ , и из (28) при  $n = N - 2$  — функции  $\mathbf{w}_{N-2}, \mathbf{g}_{N-2}$  и  $q_{N-2}$ .

Осциллирующие части уравнений (29) при  $n = N$  рассматриваем при условиях, следующих из (6.2):

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_N'' &= -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{w}_{N-1}'' - \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 (\mathbf{G}_{m,k}^{v,v} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{v}_{N-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} + \mathbf{G}_{m,k}^{h,v} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{h}_{N-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m}), \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}_N'' &= -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{g}_{N-1}'' - \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 (\mathbf{G}_{m,k}^{v,h} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{v}_{N-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m} + \mathbf{G}_{m,k}^{h,h} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{h}_{N-2}^k}{\partial \mathbf{y}_m}), \end{aligned}$$

позволяющих выделить градиентные части неизвестных вектор-функций  $\mathbf{w}_N''$  и  $\mathbf{g}_N''$  и свести данную задачу к задаче вида (8) для соленоидальных неизвестных.

Таким образом, построено полное асимптотическое разложение мод линейных возмущений и их временных инкрементов для случая, когда невозмущенное исходное стационарное состояние имеет центр симметрии. Если предельный оператор  $L_\infty$ , определенный левой частью (26), эллиптичен, то можно доказать аналогично [Вишик, 1986], что в указанном случае каждому собственному значению оператора  $L_\infty$  отвечает ветвь собственных значений исходного оператора (задачи (2)).

Анализируя приведенные алгебраические построения, можно показать (методом математической индукции), что (i) в разложениях (3) все члены при четных степенях  $\epsilon$  симметричны, а все члены при нечетных степенях антисимметричны (и следовательно  $\mathbf{v}_{2n+1} = \mathbf{h}_{2n+1} = 0$  при всех целых  $n$ ); (ii) в разложении (4) все члены при четных степенях  $\epsilon$  антисимметричны (и следовательно  $p_{2n} = 0$  при всех  $n$ ), а все члены при нечетных степенях симметричны; (iii)  $\lambda_{2n+1} = 0$  при всех целых  $n$ , т.е. собственные значения  $\lambda$  являются рядами по степеням  $\epsilon^2$ .

10. При решении задачи об устойчивости для некоторого заданного стационарного МГД состояния  $\mathbf{V}, \mathbf{H}, P$  решения вспомогательных задач (11), (12), (24) и (25), определяющие коэффициенты тензора диффузии  $\mathbf{D}$ , можно найти численно. Величину  $\min_{|\xi|=1}(-\lambda_2(\xi))$  можно интерпретировать, как минимальный коэффициент вихревой диффузии.

Аналогично работе [Zheligovsky, Podvigina, Frisch, 2001] был исследован вопрос о том, насколько часто эффект отрицательной вихревой диффузии воспроизводится в модельных случаях. Стационарные поля  $\mathbf{V}, \mathbf{H}$  задавались в виде рядов Фурье со случайными гармониками (спроектированных на пространство соленоидальных вектор-функций) и заданным энергетическим спектром. Энергия гармоник экспоненциально убывала на 6 порядков от 1-го до 10-го сферического слоя в пространстве гармоник, ряд обрывался на волновых векторах длины 10, а среднеквадратичная величина энергии поля была равна 1. Решения вспомогательных задач искали итерационными методами [Желиговский, 2001] в виде рядов Фурье с разрешением  $64^3$  гармоник, что обеспечивало достаточную точность (затухание спектра решений составляло 18-20 порядков).

Гистограммы полученных значений минимального коэффициента вихревой диффузии приведены на Рис. 1. Эффект отрицательной вихревой диффузии наблюдается уже при  $\nu = \eta = 3/4$ , что соответствует мелкомасштабным кинематическим и магнитным числам Рейнольдса  $4/3$  (при их определении характерный пространственный масштаб взят равным 1, порядка размера куба периодичности стационарного состояния). Это интересно сравнить с результатами [Zheligovsky, Podvigina, Frisch, 2001], согласно которым эффект отрицательной вихревой магнитной диффузии в задаче кинематического магнитного динамо возникает при существенно более низких значениях коэффициента молекулярной магнитной диффузии: порог  $\eta$ , при которых вихревая магнитная диффузия может стать отрицательной, лежит в интервале  $0.2 < \eta < 0.3$ .

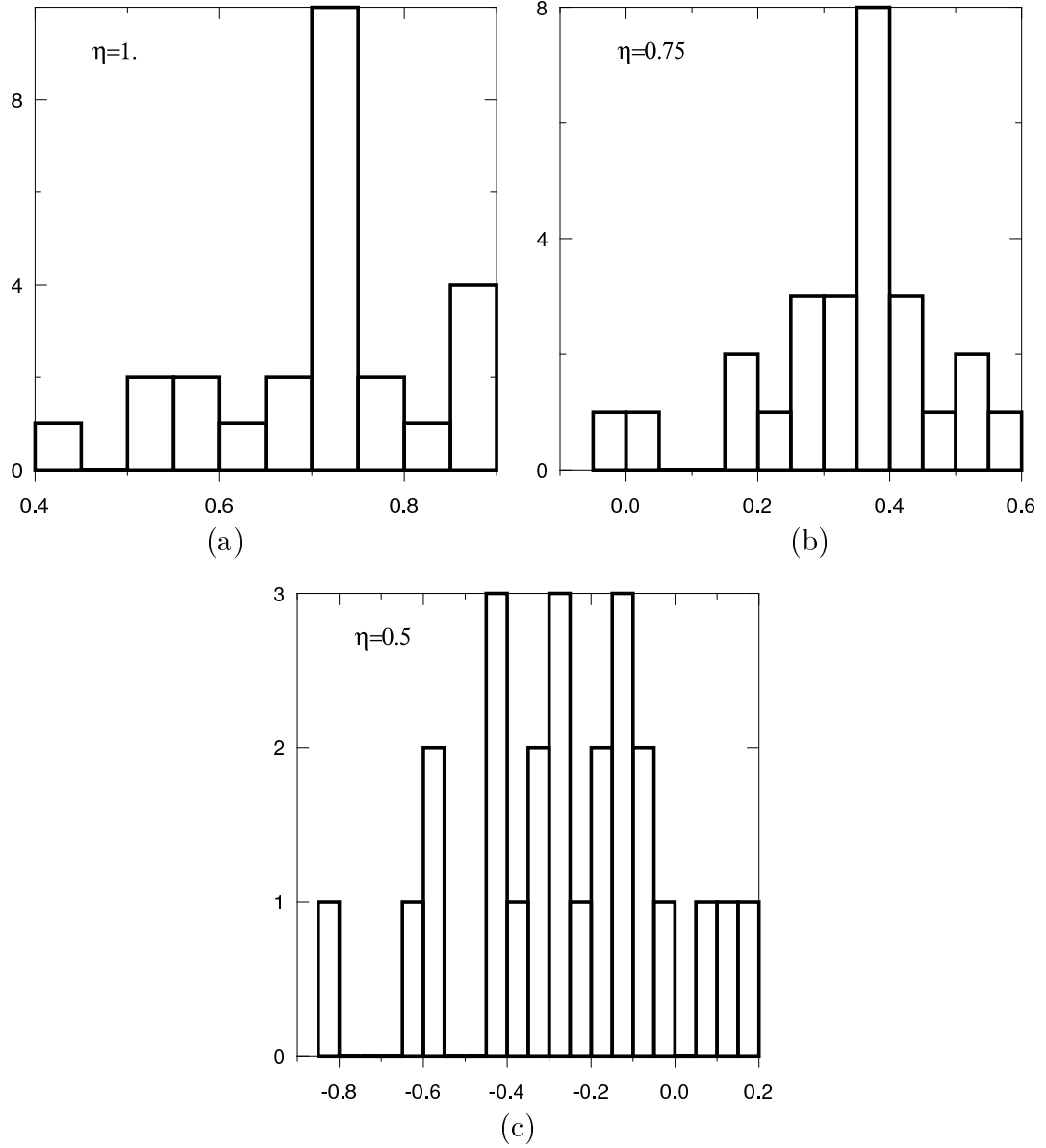


Рис. 1. Гистограммы значений минимального коэффициента вихревой диффузии в ансамблях из 25 стационарных МГД состояний со случайными гармониками:  $\nu = \eta = 1$  (a),  $\nu = \eta = 3/4$  (b),  $\nu = \eta = 1/2$  (c).

**Благодарности.** Работа выполнена с использованием вычислительных средств, предоставленных французской программой “Simulations Interactives et Visualisation en Astronomie et Mécanique (SIVAM)” в Обсерватории Лазурного Берега (Ницца). Визит автора финансировался Министерством образования Франции.

## Литература

*Вишик М.М.* Периодическое динамо. I // Математические методы сейсмологии и геодинамики (Вычислительная Сейсмология, вып. 19). М.: Наука, 186-215 (1986).

*Вишик М.М.* Периодическое динамо. II // Численное моделирование и анализ геофизических процессов (Вычислительная Сейсмология, вып. 20). М.: Наука, 12-22 (1987).

*Желиговский В.А.* О генерации магнитного поля движением проводящей среды, имеющим внутренний масштаб // Компьютерный анализ геофизических полей (Вычислительная сейсмология, вып. 23). М.: Наука, 161-181 (1990).

*Желиговский В.А.* О генерации магнитного поля движением проводящей среды, имеющим внутренний масштаб. II // Современные методы обработки сейсмологических данных (Вычислительная сейсмология, вып. 24). М.: Наука, 205-217 (1991).

*Желиговский В.А.* Чебышевский итерационный метод с расщеплением оператора для вычисления корней больших систем уравнений // Труды международной конференции "Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентности", Москва, 13-17 февраля 2000. под ред. С.Я.Герценштейн, Изд-во МГУ, 2001 (см. <http://www.obs-nice.fr/etc7/vlad.ps.gz>).

*Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А., Ха Тьен Нгоан.* Усреднение и  $G$ -сходимость дифференциальных операторов // УМН. 34 N5, 63-133 (1979).

*Като Т.* Теория возмущения линейных операторов. М.: Мир (1972).

*Козлов С.М.* Усреднение дифференциальных операторов с почти периодическими быстро осциллирующими коэффициентами // Мат. сборник. 107 N2, 199-217 (1978).

*Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.* Asymptotic Analysis for Periodic Structures. North Holland (1978).

*Biferale L., Crisanti A., Vergassola M., Vulpiani A.* Eddy viscosity in scalar transport // Phys. Fluids. 7 N11, 2725-2734 (1995).

*Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford Univ. Press (1961).

*Dubrulle B., Frisch U.* Eddy viscosity of parity-invariant flow // Phys. Rev. A. 43 N10, 5355-5364 (1991).

*Frisch U., Zhen Su She, Sulem P.L.* Large-scale flow driven by the anisotropic kinetic alpha effect // Physica D. 28, 382-392 (1987).

*Gama S., Vergassola M., Frisch U.* Negative eddy viscosity in isotropically forced two-dimensional flow: linear and nonlinear dynamics // J. Fluid Mech. 260, 95-126 (1994).

*Glatzmaier G.A., Roberts P.H.* A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal // Nature. 377, 203-209 (1995).

*Glatzmaier G.A., Roberts P.H.* An anelastic geodynamo simulation driven by compositional and thermal convection // Physica D. 97, 81-94 (1996).

*Lanotte A., Noullez A., Vergassola M., Wirth A.* Large-scale dynamo by negative magnetic eddy diffusivities // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 91, 131-146 (1999).

*Roberts P.H., Glatzmaier G.A.* The geodynamo, past, present and future // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 94, 47-84 (2001).

*Sarson G.R., Jones C.A.* A convection driven geodynamo reversal model // Phys. Earth Planet. Int. 111, 3-20 (1999).

*Sivashinsky G., Frenkel A.* Negative eddy viscosity under conditions of isotropy // Phys. Fluids. A4 N8, 1608-1610 (1992).

*Sivashinsky G., Yakhot V.* Negative viscosity effect in large-scale flows // Phys. Fluids. 28 N4, 1040-1042 (1985).

*Sulem P.L., She Z.S., Scholl H., Frisch U.* Generation of large-scale structures in three-dimensional flow lacking parity-invariance // J. Fluid Mech. 205, 341-358 (1989).

*Vergassola M., Avellaneda M.* Scalar transport in compressible flow // Physica D. 106, 148-166 (1997).

*Wirth A., Gama S., Frisch U.* Eddy viscosity of three-dimensional flow // J. Fluid Mech. 288, 249-264 (1995).

*Zheligovsky V.A.*  $\alpha$ -effect in generation of magnetic field by a flow of conducting fluid with internal scale in an axisymmetric volume // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 59, 235-251 (1991).

*Zheligovsky V.A., Podvigina O.M., Frisch U.* Dynamo effect in parity-invariant flow with large and moderate separation of scales // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 95, 227-268 (2001) [<http://xxx.lanl.gov/abs/nlin.CD/0012005>].